УДК 517.995

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОГО КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

С.С.МИРЗОЕВ, Э.У.ИСМАЙЫЛОВ
Бакинский Государственный Университет
mirzoyevsabir@mail.ru;
eldost.ismayilov.88@mail.ru

В работе исследованы некоторые аналитические свойства резольвенты операторного пучка третьего порядка с кратной характеристикой и доказана полнота системы собственных и присоединенных векторов в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторный пучок, собственные и присоединенные векторы.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H полиномиальный операторный пучок

$$P(\lambda) = (\lambda E + A)(\lambda E - A)^2 + \sum_{j=0}^{2} \lambda^j (A_{3-j} + T_{3-j}), \tag{1}$$

где λ - спектральный параметр, E - единичный оператор, а другие коэффициенты $P(\lambda)$ удовлетворяют условиям

1) A - положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным оператором A^{-1};
2) Операторы $B_j = A_j A^j$ $(j = \overline{1,3})$ ограничены в H;
3) $K_j = T_j A^{-j}$ $(j = \overline{1,3})$ вполне непрерывные операторы в H.

В данной работе мы будем изучать некоторые аналитические свойства резольвенты $P^{-1}(\lambda)$ и будем доказывать теорему о трехкратной полноте всех систем собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$.

Определение 1. Если при $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $P^{-1}(\lambda)$ существует, ограничен и определен на всем пространстве H ($P(\lambda)$ обратим), то точка λ называется регулярной точкой $P(\lambda)$. Множество регулярных точек $P(\lambda)$ обозначают через $\rho(P(\lambda))$. Множество $\mathbb{C} | \rho(P(\lambda))$ называется спектром пучка $P(\lambda)$.

Если при $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ существует вектор $x_0 \neq 0$, причем $P(\lambda_0)x_0 = 0$, то λ_0 называется собственным значением пучка $P(\lambda)$, а x_0 собственный вектор, отвечающий собственному числу λ_0. Если система $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$ удовлетворяет уравнениям

$$\sum_{j=0}^{q} \frac{d^j P(\lambda)}{d\lambda}\bigg|_{\lambda=\lambda_0} x_{q-j} = 0,\ q = 0, ..., m\ ,\ x_0 \neq 0,$$

то эта система называется системой собственных и присоединенных векторов, а $m+1$ длина системы $\{x_0, x_1, ..., x_m\}$.

Очевидно, что собственному числу λ_0 могут отвечать несколько систем собственных и присоединенных векторов. Максимум длины этих систем называют кратность собственного значения.

Определение 2. Если спектр операторного пучка $P(\lambda)$ состоит только из собственных значений с конечной кратностью, то будем говорить, что пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр.

Обозначим через

$$P_0(\lambda) = (\lambda E + A)(\lambda E - A)^2,$$

$$Q_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{1} \lambda^j A_{3-j}\ ,\ T_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{2} \lambda^j T_{3-j}$$

и

$$Q(\lambda) = P_0(\lambda) + Q_1(\lambda).$$

Имеет место

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)-3) и $(E + B_3)^{-1}$ обратим в H. Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ имеет только дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности.

Доказательство. При $\lambda \in \mathbb{C}$ операторный пучок $P(\lambda)$ можно представить в виде

$$P(\lambda) = (E + B_3)(E + L(\lambda))A^3, \tag{2}$$

где $L(\lambda) \in \sigma_\infty$, при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^3 (E + B_3)^{-1} A^{-3} + \lambda^2 (E + B_3)^{-1} (A^{-2} + B_1 A^{-2} + K_2 A^{-2}) +$$

$$+\lambda(E+B_3)^{-1}(-A^{-1}+B_2A^{-1})+(E+B_3)^{-1}K_3A^{-3}. \tag{3}$$

Очевидно, что коэффициенты операторного пучка $L(\lambda)$ вполне непрерывные операторы и можно считать, что оператор $E+(E+B_3)^{-1}K_3A^{-3}$ обратим, поскольку заменой λ через $\lambda+\delta$ можно добиться обратимости оператора при правильном подборе числа δ. Таким образом, по теореме Келдыша [1] операторный пучок $E+L(\lambda)$ обратим во всем плоскости $\mathbb{C}$ кроме точек $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$, эти точки являются полюсами $(E+L(\lambda))^{-1}$ с конечной кратностью и имеют предельную точку в бесконечности.

Очевидно, из (2) видно, что $P(\lambda)$ также имеет это свойство.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1, причем $A^{-1}\in\sigma_p$, $0<p<\infty$, тогда оператор-функция $A^3P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ.

Доказательство. Из выражения $L(\lambda)$ (3) видно, что $(E+B_3)A^{-3}\in$ $\in\sigma_{p/3}$, $(E+B_3)^{-1}(A^{-2}+B_1A^{-2}+K_2A^{-2})\in\sigma_{p/2}$, а $(E+B_3)^{-1}(A^{-1}+B_2A^{-1})\in\sigma_p$. Тогда из леммы Келдыша [1] следует, что $(E+L(\lambda))^{-1}$ представляется в виде отношений двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ. Из представления

$$A^3P^{-1}(\lambda)=(E+L(\lambda))^{-1}(E+B_3)^{-1}$$

вытекает утверждение леммы.

Теорема. Пусть выполняются условия 1)-2) и на лучах $\Gamma_\psi=\{\lambda:\arg\lambda=\psi\}$, $\psi\in(0,\pi/2]$ выполняется неравенство

$$q(\psi)=\sum_{j=0}^{2}d_j(\psi)\left\|B_{3-j}\right\|<1, \tag{4}$$

где

$$d_0(\psi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin 2\psi},\ \psi\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right],\\[2ex] 1,\ \psi\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right),\end{cases}$$

$$d_1(\psi)=d_2(\psi)=\frac{2}{3\sqrt{3}\sin\psi},\ \psi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда операторный пучок $Q(\lambda)$ обратим на луче Γ_ψ и имеет место следующая оценка

$$\sum_{j=0}^{3}\left\|\lambda^j A^{3-j}Q^{-1}(\lambda)\right\| \le const,\ \lambda\in\Gamma_\psi\,. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $\psi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\lambda\in\Gamma_\psi$, т.е. $\lambda = re^{i\psi}, r>0$. Тогда операторный пучок $P_0(\lambda)$ обратим на Γ_ψ и $P_0^{-1}(\lambda)=(\lambda^2E-A^2)^{-1}(\lambda E+A)^{-1}$. Тогда

$$Q(\lambda)=P_0(\lambda)+Q_1(\lambda)=(E+Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)P_0(\lambda),\ \lambda\in\Gamma_\psi\,,$$

и

$$\left\|Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sum_{j=0}^{2}\left\|\lambda^j A_{3-j}P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sum_{j=0}^{2}\left\|B_{3-j}\right\|\left\|\lambda^j A^{3-j}P_0^{-1}(\lambda)\right\|. \qquad (6)$$

Пусть $j=0$. Тогда при $\psi\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ число $\cos 2\psi\le 0$, поэтому

$$\left\|A^3P_0^{-1}(\lambda)\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^3(-\lambda^2e^{2i\psi}+\mu)^{-1}(\lambda\, e^{i\psi}+\mu)^{-1}\right| =$$

$$= \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^3(r^4+\mu^4-2r^2\mu^2\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}}(r^2+\mu^2+2r\mu\cos\psi)^{-\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2(r^4+\mu^4)^{-\frac{1}{2}}(r^2+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\right| \le 1.$$

При $\psi\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ число $\cos 2\psi\ge 0$, поэтому

$$\left\|A^3P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2(r^4+\mu^4-2r^2\mu^2\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}}(\mu(r^2+\mu^2))^{-\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \sup_{\tau=\frac{r^2}{\mu^2}>0}\left|\tau(r^2+1-2\tau\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{\sin 2\psi}.$$

Таким образом,

$$\left\|A^3P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le d_0(\psi),\ \lambda\in\Gamma_\psi\,. \qquad (7)$$

Аналогично доказывается, что

$$\left\|\lambda^3P_0^{-1}(\lambda)\right\| = \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|r^2(r^4+\mu^4-2r^2\mu^2)^{-\frac{1}{2}}(r(r^2+\mu^2))^{-\frac{1}{2}}\right| \le const\,. \qquad (8)$$

При $j=1$ имеем

$$\left\|\lambda A^2P_0^{-1}(\lambda)\right\| \le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2r(r^4+\mu^4-2r^2\mu^2\cos 2\psi)^{-\frac{1}{2}}(r^2+\mu^2+2r\mu\cos\psi)^{-\frac{1}{2}}\right| \le$$

$$\le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2 r(r^2+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left((r^2+\mu^2)^2\left(1-\frac{2r^2\mu^2(1+\cos 2\psi)}{(r^2+\mu^2)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right|\le$$

$$\le \sup_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2 r(r^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}\right|\left(1-\frac{4r^2\mu^2\cos^2\psi)}{4r^2\mu^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3\sqrt{3}}(1-\cos^2\psi)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{3}\sin 2\psi}, \tag{9}$$

поскольку $\sup\limits_{\mu\in\sigma(A)}\left|\mu^2 r(r^2+\mu^2)^{-\frac{3}{2}}\right|\le \sup\limits_{\tau=\frac{r^2}{\mu^2}>0}\left|\tau(\tau+1)^{-\frac{3}{2}}\right|=\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Аналогично при $j=2$ имеем:

$$\left\|\lambda^2 A P_0^{-1}(\lambda)\right\|\le\frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{1}{\sin\psi},\ \lambda\in\Gamma_\psi. \tag{10}$$

Таким образом, учитывая неравенства (7, 9, 10) в неравенстве (6), получаем, что

$$\left\|Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)\right\|\le\sum_{j=0}^{2}d_j(\psi)\left\|B_{3-j}\right\|=q(\psi)<1.$$

Тогда на луче Γ_ψ оператор-функция $E+Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda)$ обратим и

$$Q^{-1}(\lambda)=P_0^{-1}(\lambda)(E+Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda))^{-1}$$

и с учетом неравенства (7-10) получаем, что

$$\left\|\lambda^j A^{3-j}Q^{-1}(\lambda)\right\|=\left\|\lambda^j A^{3-j}P_0^{-1}(\lambda)\right\|\cdot\left\|(E+Q_1(\lambda)P_0^{-1}(\lambda))^{-1}\right\|\le const.$$

Теорема доказана

Следствие 1. Пусть выполняются условия теоремы 1 и условие 3). Тогда на луче Γ_ψ при больших $|\lambda|$ операторный пучок $P(\lambda)$ обратим и

$$\left\|\lambda^j A^{3-j}P^{-1}(\lambda)\right\|\le const,\ j=\overline{0,3},\ \lambda\in\Gamma_\psi,\ |\lambda|>R_0,\ R_0>0.$$

Доказательство. По теореме 1 на луче Γ_ψ операторный пучок $Q(\lambda)$ обратим. Тогда

$$P(\lambda)=Q(\lambda)+T_1(\lambda)=(E+T_1(\lambda)Q^{-1}(\lambda))Q(\lambda),\ \lambda\in\Gamma_\psi.$$

С другой стороны, при $\lambda\in\Gamma_\psi$, по лемме Келдыша [1]

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\|T_{3-j}\lambda Q^{-1}(\lambda)\right\|=\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\|K_{3-j}\lambda^j A^{3-j}P_0^{-1}(\lambda)((E+Q_1(\lambda))P_0^{-1}(\lambda))\right\|\le$$

$$\le const\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\|K_{3-j}\lambda^j A^{3-j}P_0^{-1}(\lambda)\right\|=0,$$

тогда оператор функции $E+T_1(\lambda)Q^{-1}(\lambda)$ обратим при $|\lambda|>R_0$, $\lambda\in\Gamma_\psi$, поэтому $P^{-1}(\lambda)$ существует при $|\lambda| > R_0$, $\lambda \in \Gamma_\psi$ и $P^{-1}(\lambda) = Q^{-1}(\lambda)(E + + T_1(\lambda)Q^{-1}(\lambda))^{-1}$. Тогда по неравенстве (6) при $|\lambda| > R_0$, $\lambda \in \Gamma_\psi$ имеет место неравенство

$$\left\|\lambda^j A^{3-j} P^{-1}(\lambda)\right\| = \left\|\lambda^j A^{3-j} Q^{-1}(\lambda)\right\| \cdot \left\|(E + T_1(\lambda)Q^{-1}(\lambda))\right\| \le const,\ j = \overline{0,3}.$$

Следствие доказана.

Следствие 2. Пусть выполняются условия следствия 1 и при $\psi = \dfrac{\pi}{2\rho}$, $A^{-1} \in \sigma_\rho (0 < \rho < \infty)$, то $A^3 P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и минимального типа при порядке ρ и на лучах $\Gamma_{\frac{\pi}{2\rho}}$ при больших (λ) имеет место оценки

$$\left\|\lambda^j A^{3-j} P^{-1}(\lambda)\right\| \le const,\ j = \overline{0,3},\ \lambda \in \Gamma_{\frac{\pi}{2\rho}},\ |\lambda| > R_0.$$

Определение 3. Пусть $\{x_{i,j,0}, x_{i,j,1}, ..., x_{i,j,m_{ij}}\}$, $j = \overline{0,q_i}$ система собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$. Тогда вектор-функции

$$u_{i,j,h}(t) = e^{\lambda_i t}\left(\frac{t^h}{h!}x_{i,j,0} + \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}x_{i,j,1} + ... + \frac{1}{1!}x_{i,j,h}\right),\ h = \overline{0,m_{ij}},\ \ j = \overline{1,q_i}$$

удовлетворяют уравнению $P(d(dt)u(t)) = 0$ и называются элементарными решениями.

Рассмотрим в $H^3 = H \oplus H \oplus H$ систему

$$K = \{(u_{i,j,h}(0), u'_{i,j,h}(0), u''_{i,j,h}(0)\}_{i=1}^{\infty},\ h = \overline{0,m_{ij}},\ j = \overline{1,q_i}\ .$$

Если система K полна в H^3, то будем говорить, что система K трехкратно полна в H в смысле М.В.Келдыша [1].

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-3), $A^{-1} \in \sigma_\rho (0 < \rho < \infty)$ и имеет место неравенство

$$\sum_{j=0}^{2} d_j(\rho)\left\|B_{3-j}\right\| < 1,$$

где коэффициенты

$$d_0(\rho) = \begin{cases} 1,\ \rho \in (0,2], \\ \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{\rho}},\ \rho \in [2,\infty), \end{cases}$$

$$d_1(\rho) = d_2(\rho) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\sqrt{3}}, & \rho \in (0,1]. \\ \dfrac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sin \dfrac{\pi}{2\rho}}, & \rho \in [1,\infty). \end{cases}$$

Тогда система трехкратно полна в H в смысле М.В.Келдыша.

Доказательство. Из результатов работы [1] следует, что если система K не является трехкратно полной в H, то существуют векторы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in H$, такие, что $\|\varphi_0\| + \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| \neq 0$ и вектор-функция

$$R(\lambda) = (P^{-1}(\overline{\lambda}))^*(f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2)$$

целая функция. Тогда, при условии $A^{-1} \in \sigma_p$, по следствию 2 $R(\lambda)$ целая функция порядка ρ и минимального типа при порядке ρ и на лучах угол соседними лучами меньше $\dfrac{\pi}{\rho}$ выполняется неравенство

$$\left\|P^{-1}(\lambda)\right\| \leq const|\lambda|^{-3}.$$

Тогда, применяя теорему Фрагмена-Линдилера, получаем, что

$$\|R(\lambda)\| \leq const|\lambda|^{-1}.$$

Отсюда получаем, что $R(\lambda) \equiv 0$, т.е. $f_0 = f_1 = f_2 = 0$. А это противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых класс несамосопряженных операторов // УМН, 1971, т.26, №4, с.15-41.
2. Мирзоев С.С., Гулиева Ф.А. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами / Матем.заметки, 2009, т.86, №5, с.797-850.
3. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Сибир.матем.журнал, 2010, т.5, №3, с.815-828.
4. Эльвабли А.Л. О разрешимости одного класса операторно-дифференциальных уравнений третьего порядка с кратной характеристикой // Вестник Бакинского Университета, 2011, №3, с. 65-70.
5. Бабаева С.Ф. Об оценке резольвенты одного класса операторных пучков третьего порядка и ее применение // Вестник Бакинского Университета, 2010, №3, с. 60-65.

BİR SİNİF ÜÇTƏRTİBLİ OPERATOR DƏSTƏNİN MƏXSUSİ VƏ QOŞMA ELEMENTLƏR SİSTEMİNİN TAMLIĞI HAQQINDA

S.S.MİRZƏYEV, E.U.İSMAYILOV

XÜLASƏ

Məqalədə bir sinif üçtərtibli təkrarlanan xarakteristikaya malik operator dəstənin rezolventasının analitik xassələri öyrənilmiş, məxsusi və qoşma elementlər sisteminin tamlığı haqqında teorem isbat olunmuşdur.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-dəstə, məxsusi və qoşma elementlər.

ON THE COMPLETENESS OF THE EIGEN AND JOINT VECTORS OF A CLASS OF THIRD ORDER OPERATOR PENCIL

S.S.MIRZAYEV, E.U.İSMAYILOV

SUMMARY

The work studies some analytical properties of the resolvent of the third order operator pencil with multiple characteristics. Completeness of the system of eigen and joint vectors in the separable Hilbert space is proved.

Key words: Hilbert space, operator-pencil, eigen and joint elements.

Поступило в редакцию: 13.01.2014 г.
Подписано к печати: 04.04.2014 г.